

© International Baccalaureate Organization 2023

All rights reserved. No part of this product may be reproduced in any form or by any electronic or mechanical means, including information storage and retrieval systems, without the prior written permission from the IB. Additionally, the license tied with this product prohibits use of any selected files or extracts from this product. Use by third parties, including but not limited to publishers, private teachers, tutoring or study services, preparatory schools, vendors operating curriculum mapping services or teacher resource digital platforms and app developers, whether fee-covered or not, is prohibited and is a criminal offense.

More information on how to request written permission in the form of a license can be obtained from <https://ibo.org/become-an-ib-school/ib-publishing/licensing/applying-for-a-license/>.

© Organisation du Baccalauréat International 2023

Tous droits réservés. Aucune partie de ce produit ne peut être reproduite sous quelque forme ni par quelque moyen que ce soit, électronique ou mécanique, y compris des systèmes de stockage et de récupération d'informations, sans l'autorisation écrite préalable de l'IB. De plus, la licence associée à ce produit interdit toute utilisation de tout fichier ou extrait sélectionné dans ce produit. L'utilisation par des tiers, y compris, sans toutefois s'y limiter, des éditeurs, des professeurs particuliers, des services de tutorat ou d'aide aux études, des établissements de préparation à l'enseignement supérieur, des fournisseurs de services de planification des programmes d'études, des gestionnaires de plateformes pédagogiques en ligne, et des développeurs d'applications, moyennant paiement ou non, est interdite et constitue une infraction pénale.

Pour plus d'informations sur la procédure à suivre pour obtenir une autorisation écrite sous la forme d'une licence, rendez-vous à l'adresse <https://ibo.org/become-an-ib-school/ib-publishing/licensing/applying-for-a-license/>.

© Organización del Bachillerato Internacional, 2023

Todos los derechos reservados. No se podrá reproducir ninguna parte de este producto de ninguna forma ni por ningún medio electrónico o mecánico, incluidos los sistemas de almacenamiento y recuperación de información, sin la previa autorización por escrito del IB. Además, la licencia vinculada a este producto prohíbe el uso de todo archivo o fragmento seleccionado de este producto. El uso por parte de terceros —lo que incluye, a título enunciativo, editoriales, profesores particulares, servicios de apoyo académico o ayuda para el estudio, colegios preparatorios, desarrolladores de aplicaciones y entidades que presten servicios de planificación curricular u ofrezcan recursos para docentes mediante plataformas digitales—, ya sea incluido en tasas o no, está prohibido y constituye un delito.

En este enlace encontrará más información sobre cómo solicitar una autorización por escrito en forma de licencia: <https://ibo.org/become-an-ib-school/ib-publishing/licensing/applying-for-a-license/>.

# Mathematik: Analyse und Ansätze

## Leistungsstufe

### 1. Klausur

8. Mai 2023

Zone A Nachmittag | Zone B Vormittag | Zone C Nachmittag

Prüfungsnummer des Kandidaten

2 Stunden

--	--	--	--	--	--	--	--	--	--

#### Hinweise für die Kandidaten

- Schreiben Sie Ihre Prüfungsnummer in die Felder oben.
- Öffnen Sie diese Prüfungsklausur erst nach Aufforderung.
- Für diese Klausur dürfen Sie keinen Taschenrechner nutzen.
- Teil A: Beantworten Sie alle Fragen. Die Antworten müssen in die dafür vorgesehenen Felder geschrieben werden.
- Teil B: Beantworten Sie alle Fragen im beigefügten Answerheft. Tragen Sie Ihre Prüfungsnummer auf der Vorderseite des Answerhefts ein und heften Sie es mit dieser Prüfungsklausur und Ihrem Deckblatt mit Hilfe der beiliegenden Klammer zusammen.
- Sofern in der Frage nicht anders angegeben, sollten alle numerischen Antworten entweder exakt oder auf drei signifikante Stellen genau angegeben werden.
- Für diese Klausur ist ein unverändertes Exemplar der **Formelsammlung zu Mathematik: Analyse und Ansätze** erforderlich.
- Die Höchstpunktzahl für diese Prüfungsklausur ist **[110 Punkte]**.



Für eine richtige Antwort ohne Rechenweg wird möglicherweise nicht die volle Punktzahl anerkannt. Die Antworten müssen durch einen Rechenweg bzw. Erläuterungen ergänzt werden. Bei falschen Antworten können ggf. Punkte für die richtige Methode vergeben werden, sofern dies durch einen schriftlichen Rechenweg erkennbar wird. Deshalb sollten Sie alle Rechenwege offenlegen.

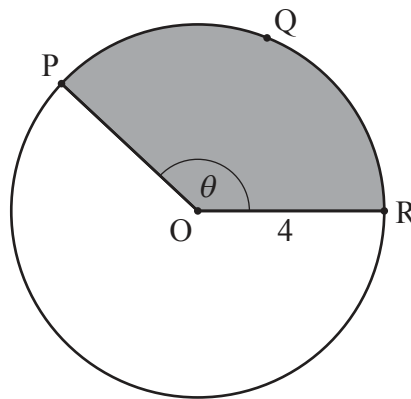
### Teil A

Beantworten Sie **alle** Fragen. Die Antworten müssen in die dafür vorgesehenen Felder geschrieben werden. Bei Bedarf kann der Rechenweg unterhalb der Zeilen fortgesetzt werden.

1. [Maximale Punktzahl: 6]

Das folgende Diagramm zeigt einen Kreis mit dem Mittelpunkt  $O$  und Radius  $4\text{ cm}$ .

**Zeichnung nicht maßstabsgerecht**



Die Punkte  $P$ ,  $Q$  und  $R$  liegen auf der Kreislinie, und der Winkel  $P\hat{O}R = \theta$  (im Bogenmaß).

Die Länge des Kreisbogens  $PQR$  beträgt  $10\text{ cm}$ .

- (a) Finden Sie den Umfang des schattierten Sektors. [2]
- (b) Finden Sie  $\theta$ . [2]
- (c) Finden Sie den Flächeninhalt des schattierten Sektors. [2]

**(Auf die vorliegende Frage wird auf der nächsten Seite weiter eingegangen)**



(Fortsetzung Frage 1)

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....



16EP03

Bitte umblättern

2. [Maximale Punktzahl: 5]

Eine Funktion  $f$  ist definiert durch  $f(x) = 1 - \frac{1}{x-2}$ , mit  $x \in \mathbb{R}$ ,  $x \neq 2$ .

(a) Der Graph von  $y = f(x)$  hat eine vertikale und eine horizontale Asymptote.

Notieren Sie die folgenden Gleichungen:

(i) Die der vertikalen Asymptote.

(ii) Die der horizontalen Asymptote.

[2]

(b) Finden Sie die Koordinaten des Punktes, an dem der Graph von  $y = f(x)$

(i) die  $y$ -Achse schneidet;

(ii) die  $x$ -Achse schneidet.

[2]

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

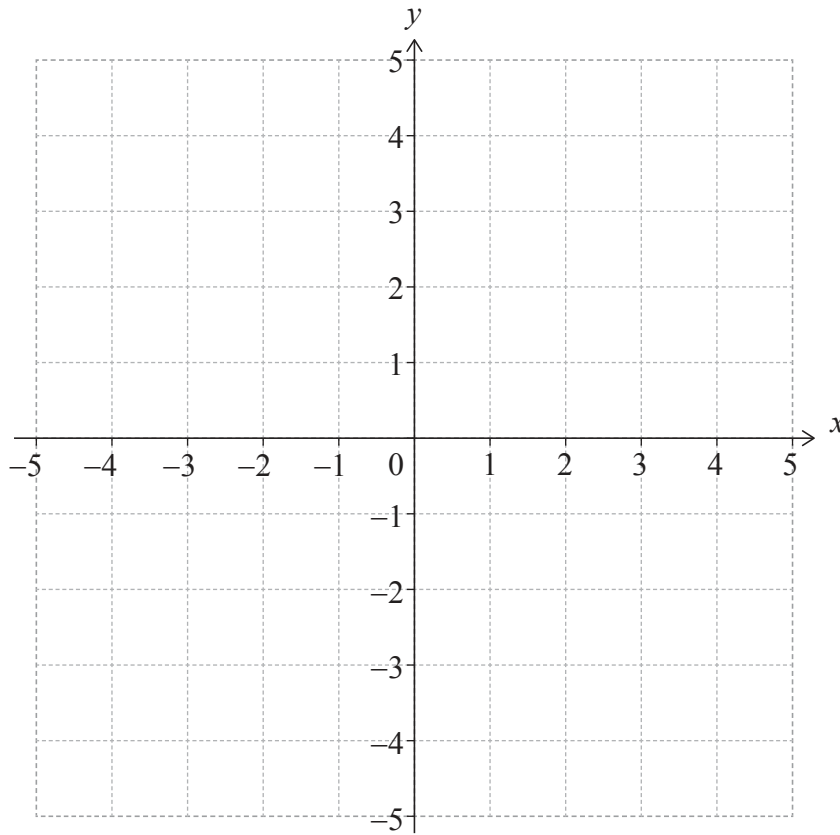
(Auf die vorliegende Frage wird auf der nächsten Seite weiter eingegangen)



**(Fortsetzung Frage 2)**

- (c) Skizzieren Sie im folgenden Koordinatensystem den Graphen von  $y = f(x)$ , der alle Merkmale aus den Teilen (a) und (b) zeigt.

[1]



16EP05

Bitte umblättern

3. [Maximale Punktzahl: 5]

Für die Ereignisse  $A$  und  $B$  gelten:  $P(A) = 0,4$ ,  $P(A|B) = 0,25$  und  $P(A \cup B) = 0,55$ .

Finden Sie  $P(B)$ .

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

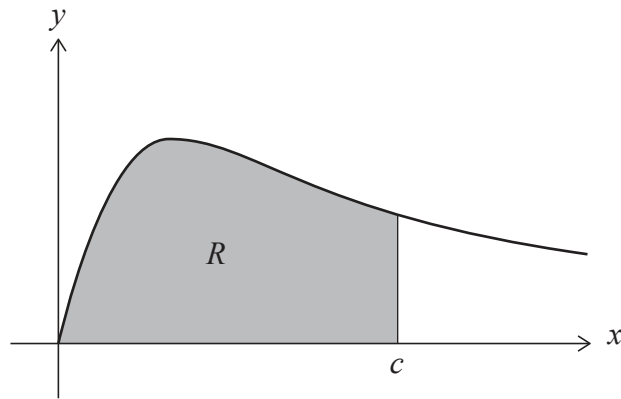
.....

.....



4. [Maximale Punktzahl: 6]

Das folgende Diagramm zeigt einen Teil des Graphen von  $y = \frac{x}{x^2 + 2}$  für  $x \geq 0$ .



Die schattierte Fläche  $R$  wird begrenzt durch die Kurve, die  $x$ -Achse und die Gerade  $x = c$ .

Der Flächeninhalt von  $R$  beträgt  $\ln 3$ .

Finden Sie den Wert von  $c$ .

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....



16EP07

Bitte umblättern







7. [Maximale Punktzahl: 7]

Beweisen Sie durch vollständige Induktion, dass  $\sum_{r=1}^n \frac{r}{(r+1)!} = 1 - \frac{1}{(n+1)!}$  für alle ganzen Zahlen  $n \geq 1$  gilt.

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

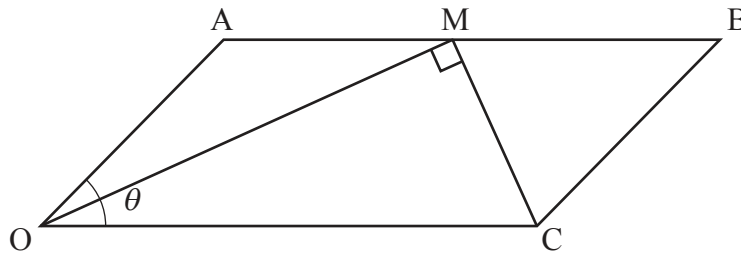
.....





9. [Maximale Punktzahl: 9]

Das folgende Diagramm zeigt das Parallelogramm OABC mit  $\vec{OA} = \mathbf{a}$ ,  $\vec{OC} = \mathbf{c}$  und  $|\mathbf{c}| = 2|\mathbf{a}|$ , mit  $|\mathbf{a}| \neq 0$ .



Der Winkel zwischen  $\vec{OA}$  und  $\vec{OC}$  ist  $\theta$ , mit  $0 < \theta < \pi$ .

Der Punkt M liegt auf  $[AB]$  so, dass  $\vec{AM} = k \vec{AB}$ , mit  $0 \leq k \leq 1$  und  $\vec{OM} \cdot \vec{MC} = 0$ .

- (a) Drücken Sie  $\vec{OM}$  und  $\vec{MC}$  in Abhängigkeit von  $\mathbf{a}$  und  $\mathbf{c}$  aus. [2]
- (b) Zeigen Sie damit mit Hilfe der Vektor-Methode, dass  $|\mathbf{a}|^2 (1 - 2k)(2 \cos \theta - (1 - 2k)) = 0$ . [3]
- (c) Finden Sie denjenigen Wertebereich für  $\theta$  so, dass es zwei mögliche Positionen für M gibt. [4]

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....



Schreiben Sie **keine** Lösungen auf diese Seite.

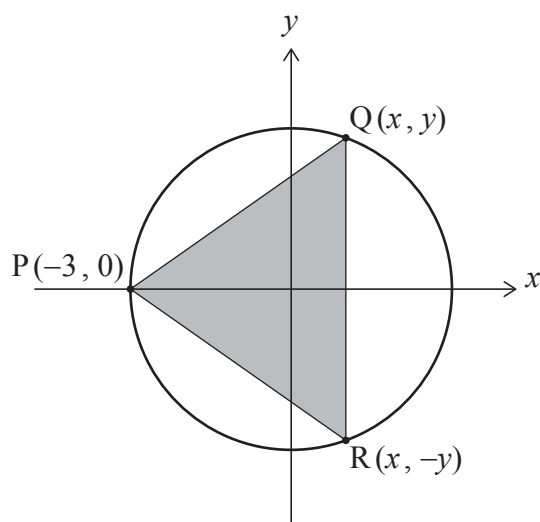
### Teil B

Beantworten Sie **alle** Fragen im beigefügten Answerheft. Bitte beginnen Sie jede Frage auf einer neuen Seite.

10. [Maximale Punktzahl: 14]

Ein Kreis mit der Gleichung  $x^2 + y^2 = 9$  hat den Mittelpunkt  $(0, 0)$  und den Radius 3.

Diesem Kreis ist Dreieck PQR mit den Eckpunkten  $P(-3, 0)$ ,  $Q(x, y)$  und  $R(x, -y)$  einbeschrieben, wobei Q und R variable Punkte im ersten bzw. vierten Quadranten sind. Dies ist im folgenden Diagramm dargestellt.



- (a) Zeigen Sie, dass für Punkt Q gilt:  $y = \sqrt{9 - x^2}$ . [1]
- (b) Finden Sie damit einen Ausdruck für den Flächeninhalt  $A$  des Dreiecks PQR, in Abhängigkeit von  $x$ . [3]
- (c) Zeigen Sie, dass gilt:  $\frac{dA}{dx} = \frac{9 - 3x - 2x^2}{\sqrt{9 - x^2}}$ . [4]
- (d) Finden Sie damit oder auf andere Weise die  $y$ -Koordinate von R so, dass  $A$  maximal wird. [6]



Schreiben Sie **keine** Lösungen auf diese Seite.

11. [Maximale Punktzahl: 22]

Betrachten Sie die komplexe Zahl  $u = -1 + \sqrt{3}i$ .

(a) Finden Sie den Betrag und das Argument von  $u$ , und zeigen Sie damit, dass  $u = 2e^{i\frac{2\pi}{3}}$ . [3]

(b) (i) Finden Sie die kleinste positive ganze Zahl  $n$  so, dass  $u^n$  eine reelle Zahl ist.

(ii) Finden Sie den Wert von  $u^n$  wenn  $n$  den in Teil (b)(i) gefundenen Wert annimmt. [5]

(c) Betrachten Sie nun die Gleichung  $z^3 + 5z^2 + 10z + 12 = 0$ , mit  $z \in \mathbb{C}$ .

(i)  $u$  sei eine Lösung  $z^3 + 5z^2 + 10z + 12 = 0$ . Finden Sie die anderen Lösungen.

(ii) Finden Sie mit Hilfe einer geeigneten Transformation von  $z$  nach  $w$ , oder auf andere Weise, die Lösungen der Gleichung  $1 + 5w + 10w^2 + 12w^3 = 0$ , mit  $w \in \mathbb{C}$ . [9]

(d) Betrachten Sie die Gleichung  $z^2 = 2z^*$ , mit  $z \in \mathbb{C}$ ,  $z \neq 0$ .

Finden Sie die Lösungen der Gleichung, indem Sie  $z$  in der Form  $a + bi$  schreiben. [5]

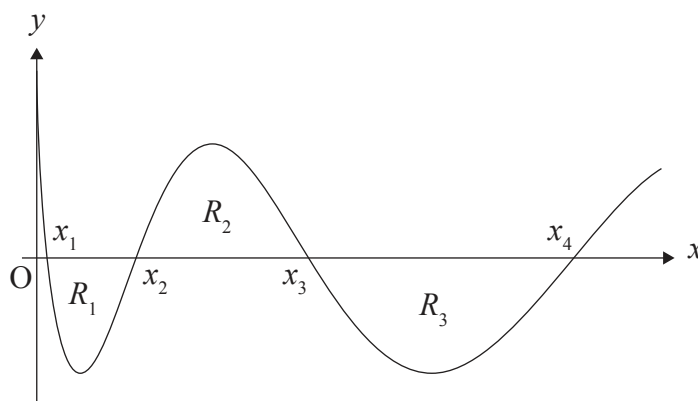


Schreiben Sie **keine** Lösungen auf diese Seite.

12. [Maximale Punktzahl: 17]

- (a) Zeigen Sie mit Hilfe einer geeigneten Substitution, dass  $\int \cos \sqrt{x} \, dx = 2\sqrt{x} \sin \sqrt{x} + 2 \cos \sqrt{x} + C$  gilt. [6]

Das folgende Diagramm zeigt einen Teil der Kurve  $y = \cos \sqrt{x}$  für  $x \geq 0$ .



Die Kurve schneidet die  $x$ -Achse bei  $x_1, x_2, x_3, x_4, \dots$

Der  $n$ -te  $x$ -Achsenabschnitt der Kurve,  $x_n$ , ist gegeben durch  $x_n = \frac{(2n-1)^2 \pi^2}{4}$ , mit  $n \in \mathbb{Z}^+$ .

- (b) Notieren Sie einen ähnlichen Ausdruck für  $x_{n+1}$ . [1]

Die durch die Kurve und die  $x$ -Achse begrenzten Flächen werden mit  $R_1, R_2, R_3, \dots$  bezeichnet, wie im obigen Diagramm dargestellt.

- (c) Berechnen Sie den Flächeninhalt der Fläche  $R_n$ .  
Geben Sie Ihre Antwort in der Form  $kn\pi$ , mit  $k \in \mathbb{Z}^+$ . [7]

- (d) Zeigen Sie damit, dass die Flächeninhalte der durch die Kurve und die  $x$ -Achse begrenzten Flächen  $R_1, R_2, R_3, \dots$  eine arithmetische Folge bilden. [3]

Quellenangaben:

© International Baccalaureate Organization 2023



16EP15



Bitte schreiben Sie **nicht** auf dieser Seite.

Antworten, die auf dieser Seite geschrieben  
werden, werden nicht bewertet.



16EP16